

# Программы математических дисциплин в российских университетах: наблюдения и соображения

Владлен Тиморин  
Полина Филиппова

Настоящее эссе не претендует на роль доказательного исследования в области университетского математического образования, а авторы не являются экспертами в вопросах образования. Тем не менее, мы сочли важным поделиться некоторыми наблюдениями, связанными с изучением программ по математике в российских университетах. Наблюдения основаны на открытых источниках, размещенных на сайтах университетов и их образовательных программ, а также на опыте общения с преподавателями математики из российских университетов (общение происходило часто в рамках программ МНМЦ НИУ ВШЭ). Мы также выразим осторожные соображения относительно перспектив развития математического образования. Речь пойдет не только и не столько об образовательных программах для подготовки математиков, сколько о математических курсах в программах самой различной направленности (естественные науки, педагогика, экономика, информационные технологии и проч.). С другой стороны, представленный взгляд на математическое образование является взглядом математиков. Излишне, впрочем, добавлять, что взгляды авторов могут не разделять другие коллеги-математики.

## **МНМЦ НИУ ВШЭ**

Изучение образовательных программ было связано с деятельностью международного научно-методического центра (МНМЦ) в области математики, информатики и цифровых технологий, образованного на базе национального исследовательского университета Высшая школа экономики (НИУ ВШЭ). Миссия МНМЦ состоит в том, чтобы способствовать качеству университетского образования в перечисленных областях. Мы изучали то, как и чему учат в других университетах, чтобы предложить программы, полезные для университетских преподавателей. Кроме того, в рамках предлагаемых со стороны МНМЦ курсов повышения квалификации преподавателей, а также в ходе преподавательских стажировок на базе НИУ ВШЭ, мы имели возможность поговорить с некоторыми преподавателями, представляющими достаточно широкую географию российских университетов, и вынести из этих разговоров некоторую информацию о математических курсах региональных университетов, предлагаемых студентам различных специальностей и направлений подготовки.

## **Характер источников**

Программы учебных дисциплин (ПУД, иногда называемые рабочими программами учебных дисциплин или рабочими учебными программами) размещаются университетами в соответствии с требованиями федеральных нормативных актов. Формальное соответствие этих программ образовательным стандартам и прочим документам бюрократически-административного характера является предметом проверок Рособнадзора и необходимым условием получения аккредитации. Положительным аспектом этого обстоятельства является доступность ПУД. Любой человек, интересующийся содержанием учебных курсов, может ознакомиться с программами, размещенными в открытом доступе на веб-портале образовательной организации. С другой стороны - именно в связи с обязательным и нормативным характером разрабатываемых документов - составитель ПУД иногда относится к своей задаче слишком формально. Вместо описания, адресованного студентам, в некоторых случаях вывешиваются формально безупречные, но содержательно бедные отписки. Впрочем, нам удалось обнаружить существенное число содержательных программ, из которых в самом деле можно получить представление о характере и темпе изложения, а также об акцентах, выделенных конкретным преподавателем. В содержательной своей части, размещенные программы содержат списки тем (сюжетов), предназначенных к изучению в рамках данной дисциплины. Это ценная информация. С другой стороны, к сожалению, не всегда удается узнать, с какой целью та или иная учебная дисциплина предлагается конкретной образовательной программой. Например, зачем биологам учить математический анализ, и почему, скажем, при выборе между анализом и дискретной математикой предпочтение отдано первому. Внятное описание целей иногда заменяется перечислением промежуточных образовательных результатов (студенты освоят такие-то понятия и методы, получат такие-то компетенции). Иногда перечисленные в качестве целей освоения дисциплины методы отсутствуют в основной программе. С другой стороны, по набору перечисленных компетенций в некоторых случаях удастся понять, рассматривается ли данный предмет как общекультурный или инструментальный. По этой причине нам во многих случаях приходилось угадывать цели изучения математики методом "обратной инженерии", глядя на список тем и образовательных результатов.

## **Чему учат**

Абсолютной доминантой математического образования является курс математического анализа. Он встречается чаще всего. Даже в программах, далеких от математики, в которых мало математических курсов. Даже если, скажем, программа предлагает только один только семестровый курс по математике, то этим курсом почти всегда будет курс математического анализа. Далее идут курсы линейной алгебры и теории вероятностей. Инструментальные курсы, связанные с математическими методами, но также учитывающие предметную специфику, отличаются большим разнообразием - кастомизированные курсы статистики, эконометрики, биометрии и проч. Мы далее прокомментируем программы и возможные цели каждого из часто встречающихся математических курсов. Но сначала дадим общий комментарий о том, вообще с какой целью можно изучать математику.

## **Возможные цели изучения математики**

Вопрос о целях и задачах изучения предмета - излюбленный пункт формальных анкет. Как правило даже надо отдельно описать цели, а отдельно - задачи. С другой стороны, вопрос “зачем изучать математику” или, более конкретно, “зачем изучать анализ, линейную алгебру и проч.” имеет разную степень осмысленности в применении к разным направлениям подготовки. Например, если речь идет о подготовке математиков, то вопрос лишен смысла. С другой стороны, роль математики и математической подготовки в других дисциплинах может сильно отличаться. Как правило, выделяют две цели изучения математических дисциплин:

- 1) Общекультурная: тренировка мышления, аналитических навыков.
- 2) Инструментальная: освоение методов, используемых в данной области.

Вообще, роль математики в современном обществе имеет по меньшей мере три грани: это и часть культуры, и язык (позволяющий в сжатой и упрощенной форме передавать накопленные веками знания), и инструмент естествознания, техники, экономики. Математика как язык, разумеется, присутствует в любом курсе математики, вне зависимости от направленности (общекультурной или инструментальной).

Позволим себе одно общее соображение относительно сочетания общекультурной подготовки с инструментальной. Инструменты легче всего осваивать на практике. В частности, нет смысла вводить существенное число вычислительных методов абстрактно, до того, как они потребовались в задаче, пришедшей из предметной области. Например, не только линейный оператор, но и матрица - это абстрактные понятия, введение которых не может быть мотивировано только вычислительной необходимостью без немедленной демонстрации этой необходимости на конкретных задачах. Трудно представить себе успешный курс математики, который предлагал бы запомнить один алгоритм, второй, третий, потому что потом пригодится. Это свидетельствует о том, что полезно привлекать к инструментальной части математических курсов экспертов из предметной области, которые бы объяснили студентам постановку математически емких задач - еще до того, как студенты начнут что-то считать.

# **1. Конкретные математические дисциплины на разных направлениях подготовки.**

## **1.1. Математический анализ**

Курс математического анализа, как уже было отмечено, встречается чаще всего. Даже в образовательных программах с минимальным объемом математики он присутствует - скажем, если предлагается только один семестровый курс по математике, то большую часть этого курса занимает анализ. Списки тем, предназначенных для изучения в курсах анализа, очень мало отличаются друг от друга и, на самом деле, очень мало отличаются от стандарта, сформировавшегося в начале 20-го века и основанного на фундаменте, заложенном в работах Коши и Вейерштрасса. Во главу угла при этом подходе поставлена

логическая последовательность изложения и концептуальная связь между различными объектами, возникающими в исчислении бесконечно малых.

Наша гипотеза состоит в том, что курсы математического анализа предлагаются практически на всех направлениях как общекультурные, то есть имеют целью не освоение конкретных практических инструментов, а общее укрепление навыков мышления. Этот вывод основан на следующих наблюдениях. Во-первых, порядок и логика изложения сильно отличались бы в случае инструментальной направленности. Как правило, в разных приложениях необходимы разные инструменты, а для освоения конкретного инструмента принято выбирать кратчайший путь к этому инструменту, в ущерб стройности изложения и концептуальной завершенности построения. Во-вторых, объем материала сильно зависел бы от объема необходимых навыков. В то же время, наблюдаются значительные вариации в часах и зачетных единицах (от 3 до 20 зачетных единиц) при не очень значительном разбросе в списке тем (два семестровых курса с практически идентичным набором тем могут отличаться в разы по трудоемкости).

Мы бы не торопились осуждать обнаруженную тенденцию. Она показывает несколько важных позитивных моментов, выявленных и закреплённых практикой преподавания. Наличие курса, развивающего мягкие навыки мышления, очень важно. Отказ от такого курса в пользу инструментальной подготовки означал бы замену мягких навыков жесткими, то есть потенциальное ослабление конкурентоспособности выпускников в условиях быстро меняющихся потребностей рынка. Выбор материала для развития мышления тоже представляется удачным. Можно было бы для этой цели использовать любой курс математики, например, предлагать вместо анализа дискретную математику, полезность которой в экономике (как, впрочем, и в биологии, химии и т.д.) возрастает с каждым днем. Но такие изменения требуют квалифицированных преподавательских кадров. С обеспеченностью квалифицированными кадрами сейчас ситуация намного лучше в анализе, чем в других математических областях. Поэтому, если и двигаться в сторону дискретной математики, то только очень постепенно. Наконец, важным подспорьем к освоению логической структуры предмета является интуиция. Интуиция, связанная с непрерывной математикой, и с математическим анализом в частности, является частью современной европейской культуры, имеющей корни в эпохе Возрождения и получившей яркое развитие во времена научной революции (17-18 вв.).

Сказанное выше, конечно, не означает, что предлагаемые курсы анализа нельзя улучшить. Прежде всего, важно обратить внимание на то, что чрезмерный объем материала затрудняет достижение поставленной цели (развитие навыков мышления). Судя по увиденным нами программам, перегруженность курса является самой острой болезнью в преподавании анализа. Имеются в виду прежде всего те направления подготовки, в которых на математику выделяется мало времени, но математика все же нужна. Мы сейчас не касаемся курсов для математиков, физиков, инженеров (им, возможно, нужно больше времени, чтобы качественно освоить весь материал, но ничего лишнего в программе нет). Для остальных направлений (в том числе, химия, биология, экономика и т.д.) мы предлагаем такой мысленный эксперимент. Представить себе программу, включающую только первую половину всей предложенной цепочки тем. Последнюю половину выкинуть, а первую половину превратить в более вдумчивый, полноценный курс. Поставить себе вопрос: какие в этом риски? Если преподаватель на

этот вопрос отвечает, что вторая половина содержит важные инструменты, которые никак нельзя опустить, то, возможно, курс должен рассматриваться как инструментальный и строиться на других принципах? (Например, начать прямо с этих важных инструментов, разобранных на конкретных примерах, а не двигаться к этим инструментам в логической последовательности). Если же существенных рисков в такой стратегии не будет найдено, то можно попытаться реализовать эту стратегию на практике преподавания. С другой стороны, может выясниться, что обе части необходимы именно как часть общекультурного багажа. Если это действительно так, то необходимо поставить вопрос об увеличении времени, выделенного на изучение предмета.

## 1.2. Линейная алгебра

Этот предмет встречается в рассмотренных программах часто, уступая только анализу. Он занимает промежуточное положение между инструментальным и общекультурным. Инструментальная составляющая состоит, по-видимому, в навыках решения линейных систем и работе с матрицами. На программах естественно-научных направлений (и, разумеется, на образовательных программах в области математики и информационных технологий) встречается концептуальный ряд “векторные пространства, линейные отображения, базисы”. С другой стороны, вычисление жордановой нормальной формы часто встречается в качестве инструментария для физических и математических направлений.

С одной стороны, линейная алгебра тоже неплохо подходит для развития “мягких навыков” аналитического мышления, но для такой роли требуется концептуальное изложение (начинающееся с понятия векторного пространства), и в целом эта область представляется более сложным полигоном, по сравнению с анализом. Поэтому, если на математику отведено мало часов, а конкретные инструменты линейной алгебры не являются абсолютно необходимой частью предметной подготовки, то этим материалом можно пожертвовать в пользу анализа.

В тех случаях, когда ключевую роль играют вычислительные аспекты линейных систем, программы не представляются ни оптимальными, ни логично построенными. Даже если речь идет только про матрицы и про процедуры работы с ними (без концептуальной базы), очень редко автор курса встает на последовательную вычислительную позицию (учитывающую разницу между работой с матрицами  $2 \times 2$  и матрицами  $1000 \times 1000$ , а также набор факторов, влияющих на вычислительную погрешность). В тех случаях, когда работа с матрицами важна в предметной области (нам известно, что в некоторых областях сельского хозяйства необходимо решать линейные системы с размера порядка  $10\,000$ , а в таком диапазоне размеров вычислительные методы сильно отличаются от тех, которые входят в стандартные курсы линейной алгебры), важно тесное взаимодействие между преподавателями-математиками и экспертами в предметной области. Более того, инструментарий предметной области лучше объяснит не математик, а тот, кто этот инструментарий использует, даже если сами инструменты относятся к математике.

Важна связь между геометрической интуицией и понятийной системой линейной алгебры. Довольно часто (хотя далеко не всегда в последние годы) выпускники школ имеют представление про векторы на плоскости (как про направленные отрезки). С

другой стороны, абстрактное понятие вектора (будь то элемент векторного пространства или набор координат) плохо связывается с интуитивным представлением о направленных отрезках. Например, опыт общения со студентами и преподавателями университетов показывает, что студенты часто не могут ответить на “очевидные” вопросы (скажем, бывают ли на плоскости тройки линейно независимых векторов), если “очевидность” этих вопросов основана на геометрической интуиции. Нам трудно судить о фокусах изложения в курсах под названием “линейная алгебра и аналитическая геометрия” (курсы с таким названием встречаются традиционно часто), но, судя по названию, такие курсы могут решать обозначенную задачу.

### **1.3. Теория вероятностей и математическая статистика**

Эта дисциплина иногда примыкает к анализу. В тех случаях, когда она существует отдельно, либо речь идет о “профессиональном” изложении теоретических аспектов для математиков (разумеется, такие программы можно пересчитать по пальцам), либо речь идет, наоборот, о специальном наборе вычислительных навыков и терминологии, принятой в конкретной предметной области (экономике, биологии, статистике). Курсы вычислительной направленности в некоторых случаях сопровождаются практикумом с использованием определенных программных продуктов. Не исключено, что к реализации курсов статистики привлечены эксперты в предметной области, которые используют статистические пакеты на практике, и делятся со студентами своим опытом. Подобный подход представляется верным.

Мы видим мало подробностей в планах по теории вероятностей. В частности, не вполне ясно, насколько важную часть изложения занимают идеи дискретной математики, прежде всего, комбинаторики. В принципе, введение этого круга идей именно в связи с вероятностными задачами представляется целесообразным. Некоторые математики предлагают даже более радикальные инновации - использовать вероятностные задачи для введения основного круга математических понятий, в том числе основных понятий анализа, таких как производные и интегралы. Впрочем, эти планы представляются рискованными - верно, что вероятностная интуиция современных студентов сильнее, чем сто лет назад, но не очевидно, что она окажется сильнее физической интуиции. Наибольшие шансы в этом смысле имеют экономисты.

### **1.4. Дискретная математика**

В реальных программах почти не встречается курсов с таким названием. С другой стороны, самые базовые объекты дискретной математики - множества, отношения, графы, перестановки, сочетания, игры - часто вводятся в математических курсах с другими названиями. Трудно понять, в каком объеме происходит знакомство с перечисленными концепциями и связанными с ними идеями, из тех кратких упоминаний, которые содержатся в рабочих планах. Если судить только по названиям, то возникает ощущение, что непрерывная математика все еще доминирует над дискретной. Это явление может иметь место по историческим причинам - традиционные приложения математики имели дело с физическими моделями и задачами инженерии, эти задачи часто сводились к уравнениям с частными производными. В последние десятилетия изменилось представление о том, что такое прикладная математика, в связи с

появлением математически глубоких задач в компьютерных науках, а также задач из области дискретной математики, возникающих на очень широком поле предметных дисциплин - от биологии до социологии и гуманитарных наук (digital humanities).

Изучения одних заголовков учебных планов может дать ощущение архаичности. Возникает подозрение, что современный переворот в приложениях математики не успел сказаться на математическом образовании. Но это слишком грубое представление. При всей инертности формулировок понятия дискретной математики проявляют себя. Возможно, реальное содержание обучения выглядит не так архаично, как список тем. Есть и другая - глубокая и фундаментальная - причина предпочтений, оказываемых непрерывной математике. Она состоит в инертности интуиции, и мы об этом уже упоминали. Классическая геометрия по-прежнему является самым простым для понимания математическим предметом именно по той причине, что интуиция мало изменилась со времен Евклида. Подобным же образом, интуиция движения и непрерывного изменения, до сих пор намного сильнее, чем интуитивные представления о хоть сколько-нибудь сложных дискретных структурах. Эту силу интуиции можно использовать и в дискретной математике, но учебным полигоном для этой интуиции по-прежнему является математический анализ.

В направлениях подготовки, связанных с социально-экономическими науками, дискретная математика может служить языком, позволяющим от практических задач предметной области перейти к необходимым для их решения математическим концепциям, в том числе из непрерывной математики. Например, можно проследить возникновение графов в конкретных задачах, затем рассмотреть матрицы смежности этих графов, и, наконец, понять математический смысл возведения таких матриц в степень.

## 1.5. Топология

Опуская ряд математических дисциплин, встречающихся в существенном числе предметных направлений, мы теперь перейдем к противоположному концу спектра, а именно, дисциплинам, которые не предлагаются почти никаким специальностям, кроме математических. Самым важным предметом в этом конце спектра является топология. Развитие математической теории, мотивированное качественными задачами естествознания и чистой математики, произошло в двадцатом веке. С существенным опозданием (часто, уже в двадцать первом столетии), курсы топологии были введены в обязательные программы по математике для математиков. Но в последние десятилетия возник широкий класс качественных задач в сфере информационных технологий (которые, через современные механизмы междисциплинарности, стали актуальными в социальных и гуманитарных науках, а не только в естествознании), которые удобнее всего формулировать и решать на языке топологии. Топологические задачи инженерии (особенно в частях, связанных с искусственным интеллектом) умножаются каждый год. Топология также оказывается важной для применения непрерывной интуиции к задачам дискретной математики.

В связи с этим возникает задача введения базовых идей топологии в курсы нематематических специальностей (или замещения этими идеями, других, менее актуальных, элементов учебного плана - скажем, для современных физиков понятие гомотопии может оказаться даже более важным, чем несобственные интегралы). К

решению этой задачи следует подходить осторожно и постепенно, с учетом дефицита квалифицированных преподавательских кадров и одновременно с мероприятиями по пополнению этих кадров и повышению их квалификации.

## 2. Особенности преподавания математики на отдельных направлениях подготовки.

### 2.0. Преподавание математики на программах по математике, по прикладной математике или по компьютерным наукам

На профильных программах предлагается широкий выбор курсов по математике. С одной стороны, разнообразие производит впечатление. С другой стороны, часто встречаются специальные курсы, направление которых обусловлено скорее интересами преподавателя, чем соображениями общей математической грамотности. Судя по всему, эти специальные курсы рассчитаны на группу студентов, занимающихся научными исследованиями под руководством конкретного профессора, то есть на конкретный научный коллектив. Сравнить такие специальные курсы между собой сложно, и эта задача не представляется важной. Поэтому главное внимание мы обращали на обязательное ядро, которое в большинстве случаев дается на первых двух курсах обучения и которое (в рассматриваемом случае около-математических специальностей) в обязательном порядке включает несколько семестров анализа и хотя бы один семестр алгебры (в т.ч. линейной алгебры).

В случае профильных программ подтверждается общая тенденция доминирования курсов математического анализа. Четыре семестра анализа (до 20-22 зачетных единиц, не включая курсов комплексного анализа и функционального анализа) - это часто встречающееся явление. При этом во многих программах обязательная алгебра занимает только один семестр (и включает линейную алгебру), и почти никогда более двух семестров. С точки зрения предметной подготовки, это может давать некоторый дисбаланс - впрочем, подобный дисбаланс, судя по всему, вообще характерен для региональных математических научных школ в России. Мы также можем предположить, что пропорции математических дисциплин в некоторой степени определяются обеспеченностью преподавательскими кадрами. В связи с этим стоит упомянуть организационный характер факультетов математики (или факультетов более широкого профиля, включающих математику). Факультеты разбиты на кафедры. Каждая кафедра отвечает за реализацию дисциплин своего направления. Например, сотрудники кафедры математического анализа могут плохо знать или не знать вовсе, что именно студенты проходят на алгебре. Кафедральная структура, конечно, упрощает организацию преподавания математических курсов. С другой стороны, в качестве негативного побочного явления наблюдаются границы между дисциплинами искусственного происхождения, скрывающие связи между математическими дисциплинами.

Приведем пример, связанный с взаимодействием анализа и линейной алгебры. Линейная алгебра, в частности, понятия линейного оператора и связанных понятий (ядро, образ, собственные векторы), нужны в многомерном анализе. Более того, в большинстве практических приложений линейные операторы возникают именно как аппроксимации, то есть дифференциалы отображений. С другой стороны, даже в программах для математиков довольно часто вопросы взаимодействия линейной алгебры и анализа откладываются до необязательного курса функционального анализа и почти игнорируются во вводном курсе анализа многих вещественных переменных. Доходит до того, что многомерная теорема о дифференцировании сложной функции излагается так, чтобы не прибегать ни к понятию линейного отображения, ни даже к концепции перемножения матриц. Это вытекает из попытки построить автономный курс - преподаватели анализа имеют отдаленное представление о том, что было в курсе алгебры, и не могут никак влиять на содержание последнего, а студенты уже не помнят пройденный ранее материал. К сожалению, следствием такого отношения является непонимание студентами той роли, которую алгебра играет в современных приложениях.

Как уже было отмечено, даже программы для математиков (за исключением самых крупных российских математических центров) не включают курсов по топологии.

## 2.1. Преподавание математики на программах по специальности “03.03.02 Физика”

Программы по физике, как правило, включают в себя следующие дисциплины: математический анализ (от 8 до 17 зачетных единиц, чаще 10-13), линейная алгебра, аналитическая геометрия (иногда эта дисциплина объединена с линейной алгеброй; суммарная трудоемкость этих двух дисциплин составляет от 5 до 8 зачетных единиц), векторный и тензорный анализ (2-4 зачетные единицы), теория вероятностей и математическая статистика (либо, изредка, теория вероятностей и случайные процессы; в отдельных случаях этот предмет отсутствует; трудоемкость составляет от 2 до 4 зачетных единиц), теория функций комплексного переменного (от 2 до 4 зачетных единиц), дифференциальные уравнения (3-4 зачетные единицы), интегральные уравнения и вариационное исчисление (2-3 зачетные единицы, иногда отсутствует), уравнения с частными производными (3-6 зачетных единиц. Чаще эта дисциплина называется «линейные и нелинейные уравнения физики» или «методы математической физики» (в последнем случае она включает и другие темы, кроме уравнений в частных производных). Иногда эта дисциплина отсутствует, нередко, в отличие от остальных перечисленных дисциплин, входит не в базовую, а в вариативную часть программы).

Иногда программы включают также теорию групп в качестве дисциплины по выбору, особенно на программах, включающих такую дисциплину как кристаллография.

Программа на направлении «Физика», как правило, включает в себя пределы, непрерывность, дифференцирование функций одной переменной, неопределенный и определенный интеграл функции одной переменной, ряды, дифференциальное исчисление функций многих переменных, а также несобственные интегралы, интегралы с

параметром, интегрирование функций многих переменных, основы теории поля (дивергенция, ротор, градиент), криволинейный и поверхностный интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье и иногда – элементы функционального анализа.

На направлении «Физика» программа по аналитической геометрии, как правило, помимо уравнений прямых и плоскостей (в т.ч., видимо, свойств, связанных с их взаимным расположением) включает кривые второго порядка (эллипс, гипербола, парабола), а иногда и поверхности второго порядка. Программа по алгебре, как правило, не сильно отличается по набору тем от того, чему учат на направлении «Экономика», кроме специальных тем, связанных с оптимизацией, преобразования координат, часто включает приведение к жордановой нормальной форме, изредка – интерполяционный многочлен Лагранжа. Кроме этого, дисциплина «векторный и тензорный анализ» обычно включает тензорное произведение.

Среди рассмотренных программ не было программ, включающих как отдельный предмет группы и алгебры Ли или функциональный анализ (элементы функционального анализа иногда есть в конце курса анализа). Иногда некоторые сведения о группах Ли входят в программу курсов по выбору по теории групп, которые часто есть там, где изучается кристаллография.

## 2.2. Преподавание математики на программах по специальности “38.03.01 Экономика”

Как правило, программы по экономике включают в себя математический анализ, алгебру, теорию вероятностей и математическую статистику и дисциплину «Методы оптимальных решений». Иногда математический анализ и алгебру объединяют в один предмет.

Трудоемкость анализа и алгебры вместе взятых составляет от 8 до 13 зачетных единиц. Трудоемкость дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» заметно варьируется и составляет от 3 до 8 зачетных единиц. Дисциплина «Методы оптимальных решений» включает, в первую очередь, линейное программирование, нередко встречается теория игр. Как и в случае математической статистики, трудоемкость этой дисциплины сильно варьируется: от 2 до 8 зачетных единиц. Дисциплины «Дискретная математика» в учебных планах мы не нашли, однако хотим отметить, что программы некоторых дисциплин включают основные понятия теории графов. Иногда в конце курса математического анализа изучают дифференциальные уравнения.

В отдельных случаях программы по экономике вообще не содержат математических предметов или математического анализа, теории вероятностей и математической статистики как отдельного предмета.

Математический анализ включает в себя пределы, непрерывность, дифференцирование функций одной переменной, неопределенный и определенный интеграл функции одной переменной, ряды, а также дифференциальное исчисление функций многих переменных.

Кроме этого, иногда программа включает несобственные интегралы, ряды Фурье, дифференциальные уравнения.

Программа по линейной алгебре обычно включает начальные сведения о матрицах и определителях, системы линейных алгебраических уравнений и аналитическую геометрию (уравнение прямой и плоскости, иногда также кривые второго порядка), нередко обсуждаются и линейные операторы и их собственные векторы и собственные значения – иногда в программе это сформулировано как собственные векторы и собственные значения матрицы, а иногда – оператора. Иногда, но реже, в программу входят скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, линейные и евклидовы пространства, билинейные и квадратичные формы, двойственные пространства а также темы, связанные с оптимизацией.

### 2.3. Преподавание математики на программах по специальности “06.03.01 Биология”

Обычно есть два математических предмета. Первый, более объёмный (как правило, от 3 до 7 з.е.), практически всегда называется “Математика” и включает в себя, в первую очередь, основы математического анализа и линейной алгебры, а также нередко элементы аналитической геометрии, некоторые темы из дифференциальных уравнений. Второй курс (обычно “Биометрия” или “Математические методы в биологии”) обычно менее объёмный по количеству часов (1-3 з.е., обычно 2), но включает в себя большое количество методов математической статистики. Мы предполагаем, что эти методы даются без доказательства.

Нередко по этому курсу нет экзамена, только зачёт. Мы делаем смелое предположение: не исключено, что на некоторых курсах подразумевается, что студенты осваивают не все методы из этого курса, а только необходимые им.

### 2.4. Сравнение математических курсов, предлагаемых в направлениях подготовки физика и экономика

На программах по физике на математические предметы выделяется больше часов, и сами эти предметы разнообразнее, чем на программах по экономике.

Что касается содержания учебных дисциплин, программы по математическому анализу и алгебре на физическом направлении, как правило, объемнее. Программа на направлении «Физика», как правило, включает в себя все эти разделы, а также несобственные интегралы, интегралы с параметром, интегрирование функций многих переменных, основы теории поля (дивергенция, ротор, градиент), криволинейный и поверхностный интегралы, ряды Фурье, преобразование Фурье и иногда – элементы функционального анализа. Включение некоторых из перечисленных тем в математические курсы для экономистов не всегда выглядит оправданным. Например, включать в программу для экономических специальностей несобственные интегралы, кажется, необязательно -

вместо этого, возможно, было бы полезнее уделить больше времени концепции (собственного) интеграла.

На направлении «Экономика» программа по линейной алгебре обычно включает начальные сведения о матрицах и определителях, системы линейных алгебраических уравнений и аналитическую геометрию (уравнение прямой и плоскости, иногда также кривые второго порядка), нередко обсуждаются и линейные операторы и их собственные векторы и собственные значения – иногда в программе это сформулировано как собственные векторы и собственные значения матрицы, а иногда – оператора. Иногда, но реже, в программу входят скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, линейные и евклидовы пространства, билинейные и квадратичные формы, двойственные пространства а также темы, связанные с оптимизацией.