КОНЦЕПЦИЯ НОВЫХ КУРСОВ ПО МАТЕМАТИКЕ или
Математическое образование XXI века

01-Алгебра: альтернативный подход к преподаванию линейной алгебры, алгебры и дискретной математики.

Автор: Гриценко Валерий Алексеевич, профессор Университета г. Лилль Франция и НИУ ВШЭ, Москва, член Университетского Института Франции (IUF).

СОДЕРЖАНИЕ

1) **01-вектора и базисные линейные структуры.**

Векторные подпространства пространства бинарных слов.

Подробная разработка первого курса дано после общей части на стр. 8–26.

2) **01-матрицы и линейные отображения.**

Конкретная алгебра и первое знакомство со структурой группы.

3) **Абстрактные векторные пространства.**

Первые шаги в абстрактной алгебре.

III. Дополнительный раздел по бинарной комбинаторике.

Этот курс настроен на задачи бинарной линейной алгебры

IV. Вводный курс по теории групп на базе линейной алгебры.

Конкретная теория линейных групп.

V. Алгебра бинарных многочленов и конечные поля.

Фактор-структуры или как построить корни, которых нет.

VI. Специализированные курсы второго этапа.

1) Теория кодирования как введение в алгебру.

2) Теория кодирования над кольцами и арифметика квадратичные целочисленные решетки.

I. Обоснование и основные идеи.

1. Неизбежный новый тренд в мировом математическом образовании.

Естественный консерватизм в преподавании математики привел к критической ситуации в университетском математическом образовании. Почти все традиционные математические курсы, включая базовые курсы для студентов-математиков, создавались с ориентацией на потребности инженерного образования XX века. Однако старые инженерные специальности заменены сегодня IT-специальностями, математические потребности которых совершенно другие. Разрешение этого противоречия требует принципиально новых базовых курсов для массовой студенческой аудитории. *Создание и внедрение таких курсов станет в ближайшее время одним из основных трендов мирового математического образования.* Этот процесс неизбежно изменит и подход к обучению студентов-математиков, как будущих преподавателей для новой целевой аудитории. Размер этой аудитории в мире практически неограничен. Только в России IT-специалистов готовят на более чем 450 факультетах.

Разработка нового тренда в математическом образовании является очень серьезной *творческой научной и практической работой*. Создание принципиально новых университетских курсов позволит нам утвердиться в качестве одного из лидеров перспективного базового математического образования для студентов-математиков и студентов всех совре-мерных IT-специальностей.

2. Фундаментальная проблема математического образования XXI века.

В XXI веке математика объективно превратилась в университетский предмет номер один, так как она преподается в той или иной форме студентам всех факультетов. Более того математика, как предмет образования, превращается в основной критерий отбора будущих специалистов. Например, во Франции во всех гранд-эколь кроме одной присутствует вступительный экзамен по математике. (В эти привилегированные учебные заведения Франции поступают по программе первых двух курсов университета.)

Необходимость преподавания математики огромному числу студентов стали неизбежным следствием современной цифровизации. Ключевое противоречие текущего преподавания математики состоит в том, что подавляющее большинство современных студентов объективно *не владеет числовой культурой и непрерывной геометрической интуицией, на базе которых формировались все стандартные курсы математики XX века,* ориентированные на подготовку аналоговых инженеров. Именно этот факт объясняет труднодоступность современного общематематического образования даже для способных студентов.

3. Новая методологическая идея.

Мы предлагаем сформировать новый тренд в преподавании математики, используя *бинарно-компьютерную интуицию* совершенно естественную для студентов, с детства погруженных в логическо-информационную среду. Это новая бинарная интуиция должна заменить сегодня аналитическую и геометрическую культуру прошлой эпохи.

При предлагаемом нами подходе математика, как предмет, превращается в инструмент обработки информации, а не в способ проведения и анализа вычислений.

Формально-вычислительная практика будет заменена на логическо-информационную с сохранением и развитием всего содержания классического математического образования, совершенно обязательного сегодня. Новая практика позволит иначе излагать материал, разрушить стену непонимания у студентов и задать новые темы для учебно-исследовательского общения студентов математиков со студентами компьютерных наук. Предлагаемое решение сформулированной выше проблемы основано на большом опыте работы со студентами разных специальностей в университетах Франции, Германии, Японии и России.

4. Цели проекта.

а) Задать новый тематический и методологический тренд в университетском математическом образовании. Создать и внедрить новый многоуровневый базовый курс математики для университетов и *дистанционного интернет-образования*, рассчитанный на всех студентов, желающих повысить компетенции в математике.

б) Сделать университетское математическое образование новым международным российским брендом. Преобразовать предмет “математика” из формально-образовательного и трудно-доступного в раздел с важнейшим общекультурным содержанием.

5. Основные организационные принципы разработки и внедрения.

1) **Главная задача программы** – создание принципиально новых математических курсов, которые составят

a) альтернативу базового курса математических факультетов университетов в объёме первых трех семестров обучения;

b) базовый курс фундаментальной теоретической математики для студентов всех IT-специальностей;

c) новую серию ключевых математических сюжетов для общего математического образования, школьников, специализирующихся в математике, и их преподавателей.

Конечная цель – создание принципиально нового учебного математического продукта для всех уровней университетского образования: *элитного, специального и массового.*

2) **Основная целевая аудитория.** Все студенты математических факультетов и факультетов IT-специальностей, аспиранты IT-специальностей и лица с высшим образованием, желающие привести в порядок свои математические знания, учителя математики специализированных классов, сильные школьники, интересующиеся математикой.

3) **Математико-методологические принципы.** Новые курсы должны отвечать социально-математическим реалиям XXI века и быть ориентированы на студентов, с детства пользующихся всеми инструментами новой цифровой цивилизации. Курсы будут базироваться не на геометрической и аналитической интуиции, которой обладают сегодня только лучшие школьники ведущих школ страны, а на *бинарной интуиции*, автоматически вырабатывающейся у всех пользователей современных информационных устройств.

4) **Конструкция курсов.** Каждый новый курс должен представлять единство теоретического (лекционного) и практического материала (набор обязательных задач для семинаров, дополнительных задач и творческих заданий). Именно смена базового блока задач и упражнений, осваиваемых студентами, составляет принципиальную трудность для преподавательского корпуса. Теоретический и практический материал будет собираться в курсы по принципу “*матрешки*”, т.е. каждый курс будет многоуровневым. Первый уровень будет осваиваться всеми, второй – мотивированными студентами, а третий будет предназначен для будущих математиков. *Подчеркнем, что речь идет о задании нового тренда в университетском преподавании математики и превращения его в новый “mainstream” обучения.*

Динамизм курса позволит создать по мере последовательных семестровых сессий итоговый мегатекст с теорией, примерами, задачами, обсуждениями, студенческими проектами, разъяснениями перекрестных связей с другими курсами цикла. Такой мегатекст, открытый для обновлений и дополнений, будет коренным образом отличаться от обычных учебников с их линейным изложением. Он станет основой преподавания по предмету, как на базовом уровне, так и на уровне спецкурсов. Мегатекст может быть размещен на популярных интернет-платформах, опубликован, переведен на другие языки.

5) **Творческая практика нового уровня.** Часть заданий будет выполняться с привлечением возможностей различных компьютерных программ типа *PARI, GAP, Macaulay, Maple, Mathematica, Magma* и других, которые будут подбираться под конкретную целевую аудиторию. Это позволит не только осваивать математику в современной информационной среде, но и превратить математические предметы в экспериментальную науку в стиле Эйлера и Гаусса.

6) **Организационные принципы разработки.** Повторим, что разработка и оформление новых курсов является *оригинальной научной работой*. Она потребует объединения нескольких талантливых ученых и преподавателей различных университетов в одну рабочую группу. Наилучшим вариантом объединения была бы независимая лаборатория или центр с временными контрактами сотрудников. К работе такого центра должны привлекаться и талантливые студенты с педагогическими склонностями для тестирования практического материала. Повторим, что разработка новых курсов, их адаптация к различным образовательным задачам, настройка для студентов разного уровня подготовки, создание новых “minor'ов” по математике для разных специальностей – это фундаментальная научно-исследовательская работа, связанная с решением различных теоретических и прикладных математических задач, с разработкой совершенно новой методики лекций и семинарской практики.

7) **Принцип и формы внедрения.** Новая математическая программа должна разрабатываться и внедряться *в альтернативной форме*, чтобы не входить в рабочее противоречие со стандартной университетской программой по математике. Внедрение новых математических курсов будет идти эффективней, если оно будет носить надуниверситетский характер и иметь форму дополнительного университетского образования. Новые принципы могут быть внедрены в практику при помощи международного интернет образования. Для успешного продвижения наших идей необходимо создать единый блок новых интернет-лекций и семинаров, охватывающих минимум три учебных семестра.

На первом этапе предполагается создание **курсов-специализаций** (блоки из трех-пяти учебных курсов с заключительным курсовым проектом) для известных платформ международного и российского **интернет-образования** (например, для Coursera). Отмечу, что аудитория платформы Coursera – десятки тысяч студентов по всему миру, а средний возраст активных пользователей международной платформы Coursera – 27/28 лет.

Для альтернативного очного образования планируется подготовка **триместровых** или **месячных программ**, которые можно внедрять на новых образовательных площадках, например, в Центре Сириус в Сочи.

После подготовки первых курсов возможна организация летних и зимних школ для молодых преподавателей университетов для тестирования и внедрения предлагаемых курсов в региональных университетах.

Как было отмечено выше, математика уже превратилась в основной общеобразовательный университетский предмет. На базе наших курсов, настраиваемых на аудиторию с разной математической подготовкой, можно будет сформировать дополнительное образование по математике в качестве возможной вспомогательной специализации (компетенции) для студентов разных факультетов, как на уровне бакалавриата, так и на уровне магистратуры.

VI. Перспективы реализации.

1) **Новая площадка для преподавания математики.** На втором этапе возможно создание своей площадки, которая предоставит возможность всем студентам и лицам с высшим образованием пройти базовый курс современной математики типа «ABC in Mathematics». Курсы должны идти на нескольких языках, чтобы внедрять наработанный материал на уровне международного математического пространства. Работа с иностранными студентами может идти на платной основе на различных международных интернет-платформах. Потенциальная мировая аудитория подобных курсов – *десятки тысяч* (для специализированных программ) и *сотни тысяч (*для общеобразовательных математических программ).

2) **Курсы "по требованию".** Теоретическое осмысление и конкретно-практическая часть учебных курсов должны изначально создаваться так, чтобы его постоянное семестровое обновление было возможным, естественным и позволяло бы проводить курсы "по требованию", настраивать изложение под конкретную российскую или международную аудиторию.

3) **Математика и культура.** Для популяризации нашего подхода к преподаванию, продвижения предлагаемых нами методов преподавания математики необходим создать и проработать короткие увлекательные сюжеты из истории науки и культуры, из художественных произведений и реальной практики, связанные с математикой разрабатываемых курсов. Эти темы и примеры можно будет представлять в рамках популярных лекций для широкой публики, коротких познавательных компьютерных сюжетов и т.д.

4) **Международное сотрудничество.** Математика, как один из главных учебных предметов XXI века, не знает культурных, социальных или языковых барьеров. Проблемы с университетским преподаванием математики в разных странах фактически одни и те же. По мере формирования стиля наших новых курсов и *их подготовки для международной студенческой аудитории* было бы разумно предусмотреть возможность привлечения (на один-два месяца) ведущих профессоров и ярких молодых преподавателей российских и зарубежных университетов для совместной работы над лекциями и продвижения интернет-курсов, разрабатываемых на наших новых принципах.

5) **Формирование нового обучающего продукта.** Итогом работы может стать новый современный общеуниверситетский курс математики и набор дополнительных спецкурсов к нему. По мере формирования, чтения и продвижения интернет-курсов этого цикла, накопления конкретного научного и учебного материала возможно будет начать разработку новых интерфейсов для превращения наших интернет-лекций и семинаров в обучающий компьютерный продукт. Ниже мы дает детальное описание первого возможного курса с образцами возможных семинарских занятий (см. стр. 7 – 26).

Курс готовится как для математиков, так и для студентов любых IT-специальностей. При необходимости параллельно разбираются необходимые вопросы из курса по бинарной комбинаторике (см. Раздел V).

Все содержание курса разбивается по темам, а не лекциям. Какая-то тема займет 20 минут. минут, какая-то – 60. Все зависит от уровня студентов, для которых готовится курс: студенты первого семестра, студенты, желающие рассмотреть раздел с новой точки зрения, специалисты, получающие дополнительное образование, способные школьники.

По каждой теме разрабатывается рабочий семинар: примеры и контрпримеры, базисные задачи с решениями, список задач для самостоятельного решения, более трудные творческие вопросы. Можно делать дополнительные «вставки» для слабо подготовленных студентов (детальный разбор примеров, объяснение формул типа суммирования, объяснение комбинаторики из Раздела V) и творческие «вставки» для мотивированных студентов. Модель курса позволяет одновременно ориентировать и на начинающих, и на тех, кто уже прошел курс линейной алгебры. В конце естественных раздела будут готовиться «листочки» с задачами разной сложности для самостоятельного решения и отчета по изучению курса. Их можно использовать для перекрестной самостоятельной проверки студентами уровня из подготовку по принципам платформы COURSERA.

II. План и основные методологические идеи курса по 01-линейной алгебре.

На примере первого курса мы даем более детальные разъяснения нашего метода изложения. Математически, в первом курсе мы занимаемся базовым, и одним из важнейших, разделов линейной алгебры -- теорией линейных подпространств «канонического» линейного векторного пространства размерности n. Рассматривая теорию над полем из двух элементов мы приближаем предмет ко всем IT-студентам. Например, мы полностью исключаем из теории плохо понятные для студентов поля вещественных или комплексных чисел, явные вычисления в которых не очень реальны. Более того мы исключаем из начального курса все семантические рассуждения с абстрактными полями, требующие совсем другой уровень математической культуры. При этом мы сохраняя весть содержательный аспект и весь инструментарий линейной алгебры. Более того, в рамках нашего «конкретного» подхода мы очень быстро приходим к содержательным математическим задачам, проблемам и конструкциям: грассманиан (множество всех линейных подпространств), конечные проективные плоскости (граф грассманиана трехмерного пространства), лагранжианы (ортогональные себе подпространства или автодуальные коды).

Мы отмечаем основные ПРОБЛЕМЫ курса и основные методологические пункты и особенности изложения, которые позволяют существенно сокращать время изложения, по сравнению с традиционными курсами и дать курсу совершенно новое направление.

1. Бинарные 01-вектора и базисные линейные структуры.
Детальный план первого вводного курса.

ТЕМА 1: СЛОЖЕНИЕ БИНАРНЫХ СЛОВ.

Вычисление в множестве из двух элементов $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

Линейные уравнения $a + b = c$ в поле F_2.

Бинарные слова длины n: $\mathbb{F}_2^n$.

Операции с бинарными словами, нулевое слово $\bar{0}$, линейные уравнения $v + a = b$, $a + b = \bar{0}$, $b + c = \bar{1}$.

Аннигиляция $0 \cdot v = \bar{0}$ и сохранение $1 \cdot v = v$.

ПРОБЛЕМА. *Сколько различных слов можно получить при сложении нескольких фиксированных слов?*

Первый Ответ: множество всех сумм фиксированного набора слов замкнуто относительно операции сложения слов.

Указанная выше проблема является генератором введения основных констрикций: линейная комбинация вектор, нулевой вектор, как линейная комбинация, могут ли совпадать две линейные комбинации и т.д.

`Рабочие Вопросы:`

1) Сколько линейных комбинаций можно составить из нескольких фиксированных векторов?

2) Равенство двух линейных комбинаций дает линейное соотношение между векторами.

Эти вопросы ключевые в первой теме. Необходимо дать конкретные содержательные примеры, избегая на первом этапе громоздкого семантического блока традиционной линейной алгебры.

`Методика:` Начиная работу с полем из двух элементов, мы избегаем всей семантической дискуссии об определении поля, примерах полей (это несколько лекций на первом курсе математическом факультете, но говоря уже о поле вещественных чисел, которое слишком трудно и избыточно для начинающих и для всех IT-специалистов.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 1

1) Линейные комбинации трех векторов. Рассмотреть три бинарных вектора u, v, w длины три или четыре. Сколько сумм $u + bv + cw$ можно составить? Множество линейных комбинаций замкнуто относительно сложения. Если какая-то линейная комбинация равна $\bar{0}$, то что можно сказать о векторах? Сколько различных сумм получится в этом случае? Исследовать все возможные случаи: 8, 4, 2, 1.

2) Дайте примеры линейных соотношений между векторами в $\mathbb{F}_2^4$.

3) Пусть $w(v)$ – вес слова v, т.е. число единиц в бинарном слове. Доказать, что $w(v) + w(u) \geq w(v + u)$ и что $w(v) + w(u) - w(v + u)$ – четное.

4) Доказать, что множество векторов (слов) $u \in \mathbb{F}_2^n$ четного веса замкнуто относительно сложения.

5) Для каких слов $w(v) + w(u) = w(v + u)$?

ТЕМА 2: ПОДПРОСТРАНСТВА в $\mathbb{F}_2^n$.

Мы формализуем вопрос, поставленный в ТЕМЕ 1, чтобы дать на него принципиальный ответ. Множество линейных комбинаций фиксированных векторов всегда имеет 2^m элементов!

Подпространство пространства бинарных слов (векторов) $\mathbb{F}_2^n$ – это непустое подмножество, замкнутое относительно операции сложения векторов.

Примеры.

1) $\{\bar{0}\}$, $\{\bar{0}, v\}$, $\mathbb{F}_2^n$, $\{\bar{0}, u, v, u + v\}$.
2) Множество слов с четным (нечетным) числом единиц.
3) линейная оболочка множества слов.

Общие свойства:
а) $\bar{0}$ принадлежит любому подпространству.
б) $\mathbb{F}_2^n < \mathbb{F}_2^n$.
в) Пересечение подпространств есть подпространство.

Теорема. Размерность подпространства.

1) Любое подпространство $V < \mathbb{F}_2^n$ имеет 2^m элементов, где m называется размерность подпространства.

Доказательство ведется `методом удвоения`, который дает ясный алгоритм построения базиса подпространства. Алгоритм приводит к следующим важнейшим теоретическим следствиям:

2) У каждого подпространства есть базис из одного и того же числа элементов.

3) Если $V < W$, любой базис V можно дополнить до базиса W. В частности, любой базис подпространства $V < \mathbb{F}_2^n$ можно дополнить до базиса всего пространства.

Пример. Множество подпространств трехмерного бинарного пространства и конечная проективная плоскость Фано.

Метод удвоения.

Пусть $|U| = 2^k$ – подпространство $\mathbb{F}_2^n$. Если $v \notin U$, то $W = U \cup (v+U)$ – подпространство, содержащее 2^{k+1} элементов.

`Методика.` Данная подход, конечно, невозможен в традиционных курсах линейной алгебры на полем $\mathbb{R}$ или над произвольным полем. При таком выборе изложения важнейшие результаты о существовании базиса в подпространстве и расширения базиса с подпространства доказывается уже на первой университетской лекции! Пример конечной проективной плоскости Фано сразу вводит студентов в интереснейший мир конечной геометрии.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 2

1) `Примеры подпространств.`

В каждом из примеров установить, является ли рассматриваемое множество линейным подпространством в $\mathbb{F}_2^n$. Если это так, то найти его размерность и какой-нибудь базис. Если множество не является подпространством, представить его, по возможности, линейно, используя какое-нибудь подпространство.

а) множество векторов, какая-то координата (несколько координат) которого равна 0;

б) Множество векторов, у которых совпадают первая и последняя координаты.

в) Множество векторов, у которых координаты с четными номерами равны 0.

г) Множество векторов, у которых координаты с четными номерами равны между собой.

д) Множество векторов четного (нечетного веса)?

е) Множество векторов, содержащих четное число координатных единиц.

ж) Множество векторов, содержащих нечетное число координатных единиц.

з) Множество векторов, число координатных единиц которых делится на 4.

2) `Структура множества ненулевых линейных подпространств в` $\mathbb{F}_2^3$. (*Конечная проективная плоскость Фано.*)

а) Доказать, что пересечение любых двух “плоскостей” (подпространств размерности два) в $\mathbb{F}_2^3$ является некоторой “прямой” (подпространством размерности один).

б) Найти число подпространств размерности один и два (“прямых” и “плоскостей”) в трехмерном пространстве $\mathbb{F}_2^3$, не перебирая все подпространства.

в) Дать схему взаимной принадлежности всех ненулевых линейных подпространств в $\mathbb{F}_2^3$ в форме графа.

3) `Базисы в` $\mathbb{F}_2^3$.

а) Найти число всех базисов в $\mathbb{F}_2^2$ и $\mathbb{F}_2^3$.

б) Дать список всех базисов в $\mathbb{F}_2^2$ и $\mathbb{F}_2^3$, т.е. предложить алгоритм, выписывающий все базисы в каком-то порядке.

ТЕМА 3. СКОЛЬКО ИМЕЕТСЯ ПОДПРОСТРАНСТВ?

Эта тема является непосредственным применением `метода удвоения` из ТЕМЫ 2 и совершенно невозможна в традиционном курсе линейной алгебры.

1) Определить число базисов k-мерного подпространства.

`Метод удвоения` из Темы 2 сразу дает результат число базисов $B_k^{(n)}$ любого k-мерного подпространства в $\mathbb{F}_2^n$:

$$B_k^{(n)} = (2^k - 1)(2^k - 2)...(2^k - 2^{k-1}).$$

Примеры: Плоскость и трехмерное подпространство. Перебор базисов. Как перебрать все базисы?

2) Используя пункт 1) можно найти число подпространств $N_k^{(n)}$ размерности k в $\mathbb{F}_2^n$:

$$N_k^{(n)} = \frac{B_k^{(n)}}{B_k^{(k)}}.$$

3) Легко убедиться, что все подпространства размерности m устроены в этом смысле одинаково. Число подпространств $V_k < U_m$ размерности k в любом подпространстве $U_m < \mathbb{F}_2^n$ размерности m совпадает с $N_k^{(m)}$.

4) Арифметические тождества дают:

$$N_1^{(n)} = N_{n-1}^{(n)}, \quad N_2^{(n)} = N_{n-2}^{(n)}, \dots N_k^{(n)} = N_{n-k}^{(n)} \;\forall\, k.$$

ПРОБЛЕМА 1. *Можно ли это объяснить последние соотношения, используя только язык линейной алгебры? Иными словами, можно ли установить соответствия между k-мерными и $(n-k)$-мерными подпространствами?*

Ответ на этот вопрос будет дан ниже в ТЕМЕ 9 о двойственности линейных подпространств.

ПРОБЛЕМА 2. **Синтез линейная алгебры, алгоритмики и комбинаторики.** Еще один интересный вопрос, который можно поставить. *Как перебрать все подпространства фиксированной размерности?*. Подобные алгоритмические вопросы являются настоящим синтезом линейная алгебры, алгоритмики и комбинаторики, который превращает теоретические вопросы в чисто практические задания для настоящих лабораторных работ. И наоборот, конкретные задачи с конкретными объектами фактически сливаются с теоретическими исследованиями.

`Методика.` Отметим, что вопросы, приведенные выше, совершенно невозможны в традиционном курсе линейной алгебры. Они интересны не только с алгоритмической точки. Перечислительные задачи позволяют готовить студентов к сложным конструкциям абстрактной алгебры: отношения эквивалентности, фактор структуры, действие группы на множестве, разбиение на множество орбит. Например, этот вопрос содержателен уже для подпространств размерности 1! Он позволяет освоить сразу две конструкции из теории множеств и арифметики: алфавитный порядком и двоичная система счисления. Именно такой подход используется в конструкции дополнительного курса по комбинаторики.

Две дополнительные исследовательские темы для хороших студентов в контексте этого раздела:

1) *q-биномиальные коэффициенты или Гауссовы биномиальные коэффициенты*,

2) *Граф Грассмана.*

СЕМИНАР по ТЕМЕ 3

`Методика.` Данная тема совершенно не встречается в традиционных курсах линейной алгебры. Она открывает тему структурных и комбинаторных вопросов по теории линейных подпространств, которые позволяют студентам не только осознать понятие базиса, но и готовят их к понятию абстрактного линейного подпространства и понятия фактор пространства. Для решения задач достаточно применять только `метод удвоения` и обычные комбинаторные рассуждения. Это позволяет студентам овладевать комбинаторикой в новом математическом контексте. Дополнительный курс комбинаторики, ориентированный на бинарную алгебру, входит в пакет предлагаемых курсов.

1) `Подпространства в` $\mathbb{F}_2^4$.

а) Найти число одномерных подпространств.

б) Найти число двумерных подпространств.

в) Найти число трехмерных подпространств, используя выборы базисов.

г) Пусть (v_1, v_2) какой-то базис двухмерного подпространства (плоскости) V_2 в $\mathbb{F}_2^4$. Сколькими способами его можно достроить до базиса пространства $\mathbb{F}_2^4$?

д) Найти число трехмерных подпространств, содержащих фиксированное подпространство размерности 1.

е) Найти число плоскостей U_2 в $\mathbb{F}_2^4$ таких, что $V_2 \cap U_2 = \{0\}$.

ж) Найти число плоскостей U_2 в $\mathbb{F}_2^4$ таких, что пересечение $V_2 \cap U_2$ одномерно.

з) Полным флагом в пространстве $\mathbb{F}_2^4$ называется последовательность подпространств

$$\{\bar{0}\} \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \mathbb{F}_2^4,$$

где $\dim V_m = m$. Найти число полных флагов.

2) `Подпространства в подпространстве.`

Показать, что число k-мерных подпространств произвольного m-мерного подпространства $U_m < \mathbb{F}_2^n$ совпадает с числом $N_k^{(m)}$.

3) “`Надпространства`”.

а) Найти число подпространств размерности 4 в $\mathbb{F}_2^6$, содержащих фиксированное подпространство размерности 2.

б) Найти число подпространств размерности k в $\mathbb{F}_2^n$, содержащих фиксированное подпространство размерности 2.

в) Дать обобщение вопроса б) на случай подпространство размерности 3.

г) Найти число подпространств размерности k в $\mathbb{F}_2^n$, содержащих фиксированное подпространство размерности m.

4) `Все подпространств размерности 2.`

Создать алгоритм, который выдает список всех подпространств размерности 2 в $\mathbb{F}_2^n$. Начните с маленьких размерностей.

ТЕМА 4. КАК ЗАДАТЬ ПОДПРОСТРАНСТВО?

`Методика.` После того, как мы нашли число подпространств каждой размерности, возникает вопрос о том, как можно задать любое подпространство? Это возвращает нас к самой первой ТЕМЕ, где мы показали, что множество линейных комбинаций замкнуто относительно сложение. Данная тема возвращает нас к стандартным понятиям линейной алгебры. На этом этапе мы легко вводим все формальные теоретические понятия и лингвистические конструкции.

`Первый рабочий вопрос`: найти наименьшее подпространство U, содержащее m фиксированных векторов v_1,..., v_m пространства $\mathbb{F}_2^n$.

V совпадает со множеством всех линейных комбинаций векторов v_1,..., v_m

$$V = \mathrm{Vect}(v_1, ...v_m) = \{a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m \,|\, a_i \in \mathbb{F}_2\}.$$

Это подпространство называется линейной оболочкой данных векторов. Если все линейные комбинации различные, то v_1,..., v_m базис подпространства V. Это эквивалентно тому, что V содержит ровно 2^m элементов.

Если dimV меньше m, то среди векторов есть нетривиальное линейное соотношение, и они называются линейно зависимыми. Отличие семейства образующих от базиса пространства. Линейная зависимость и линейная независимость.

ПРОБЛЕМА. *Как практически найти базис линейной оболочки векторов в общем случае?*

Эта проблема будет решена в следующем разделе.

2. Операции с подпространствами.

$U, V < \mathbb{F}_2^n$, то $U \cap V < \mathbb{F}_2^n$ и $U + V < \mathbb{F}_2^n$.

Нахождение системы образующих суммы подпространств $U + V$.

Теорема. Пусть $U, V < \mathbb{F}_2^n$.

$$\dim{(U + V)} = \dim U + \dim V - \dim{(U \cap V)}.$$

ПРОБЛЕМА. *Как найти базис подпространства $U \cap V$?*

Ответ будет дан в ТЕМЕ 8. Для решения этой проблемы нам потребуются другие способы задания подпространств.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 4

1) **Линейная независимость векторов.**

а) Есть ли базис у нулевого векторного подпространства?

б) Если система векторов содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.

в) Если система векторов содержит два одинаковых вектора, то она линейно зависима.

г) Доказать, что любые два различные ненулевых вектора в $\mathbb{F}_2^n$ линейно независимы.

д) Найти простой критерий линейной независимости трех ненулевых попарно различных векторов в $\mathbb{F}_2^n$.

е) Аналогичный вопрос для четырех векторов.

ж) Векторы $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{F}_2^n$ $(m > 1)$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них линейно выражается через остальные.

з) Пусть векторы $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{F}_2^n$ линейно независимы. Вектор u линейно выражается через $v_1, \ldots, v_m$ тогда и только тогда, когда векторы $v_1, \ldots, v_m, u$ линейно зависимы.

и) Пусть вектор u линейно выражается через $v_1, \ldots, v_m$. Это выражение единственно тогда и только тогда, когда $v_1, \ldots, v_m$ линейно независимы.

2) **Образующие и базисы в V.**

а) Используя метод удвоения ($V' = V \cup (u + V)$, где $u \notin V$), доказать, что система векторов $(u_1, \ldots u_m)$ порождает подпространство $V \subset \mathbb{F}_2^n$, т.е.

$$V =< u_1, \ldots u_m >= \{a_1 u_1 + \ldots + a_m u_m,\ a_i \in \mathbb{F}_2\},$$

тогда и только тогда, когда она содержит некоторый базис $(u_{i_1}, \ldots u_{i_k})$ подпространства V.

б) Пусть имеются два подпространства $U \subset V \subset \mathbb{F}_2^n$. Рассмотрим какой-нибудь базис $(u_1, \ldots, u_k)$ подпространства U и дополним его векторами $(v_{k+1}, \ldots, v_m)$ до базиса подпространства V. Доказать, что любая ненулевая линейная комбинация этих векторов не лежит в подпространстве U

$$\forall\, b_{k+1}, \ldots, b_m \in \mathbb{F}_2 :\ b_{k+1} v_{k+1} + \ldots + b_m v_m \notin U.$$

3) **Соотношения между подпространствами.** Зафиксируем какое-нибудь подпространство V_4 размерности 4 в $\mathbb{F}_2^8$.

а) Найти число подпространств $U_6 \subset \mathbb{F}_2^8$ размерности 6 таких, что U_6 содержит V_4.

б) Найти число подпространств $U_4 \subset \mathbb{F}_2^8$ размерности 4 таких, что их пересечение тривиально $V_4 \cap U_4 = \{\bar{0}\}$.

в) Найти число подпространств $U_4 \subset \mathbb{F}_2^8$ размерности 4 таких, что

$$\dim (V_4 \cap U_4) = 2.$$

г) Найти число упорядоченных пар подпространств (V_6, U_6) в $\mathbb{F}_2^8$ размерности 6 таких, что

$$V_6 + U_6 = \mathbb{F}_2^8.$$

4) **Пересечение подпространств.** Пусть U, V, W – подпространства $\mathbb{F}_2^n$.

а) Если $\dim U + \dim V > n$, то $U \cap V \neq \{\bar{0}\}$.

б) Если $\dim(U+V) = 1 + \dim(U \cap V)$, то сумма $U+V$ равна одному из подпространств.

в) Можно ли утверждать, что $U \cap (V+W) = (U \cap V) + (U \cap W)$?

г) Доказать, что

$$(U+W) \cap (W+V) \cap (V+U) = [(W+V) \cap U] + [(V+U) \cap W].$$

ТЕМА 5. Метод Гаусса. Нахождение базиса подпространства, заданного образующими.

ПРОБЛЕМА. Как найти базис линейной оболочки векторов?

Эта проблема решается методом Гаусса.

1) Организация порождающих векторов в виде матрицы.

2) Элементарные преобразования со строками.

3) Ступенчатая матрица как пример линейно независимых векторов.

Над полем $\mathbb{F}_2$ реализовывать метод Гаусса очень легко (в отличие от поля рациональных чисел!). Именно поэтому мы можем приводить любую матрицу не просто в верхнетреугольной форме, но осуществлять полное приведение матрицы порождающих векторов к виду, когда над над осевыми элементами стоят только нули. Эта матрица даст нам систему уравнений, задающую подпространство. Эта линия будет реализована в ТЕМЕ 7.

`Методика.` На данном этапе в курсе впервые появляются двумерные таблицы, матрицы, как форма организации семейства образующих некоторого подпространства.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 5

1) **Метод Гаусса и нахождение подпространств $U+V$ и $U \cap V$.**

Мы рассматриваем подпространство $V \subset \mathbb{F}_2^5$ (соответственно, U) порожденное **векторами-строчками** матрицы M (соответственно, N).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Найти размерности подпространств U и V и их базисы.

б) Задать подпространства U и V системами линейных уравнений.

в) Найти размерность подпространства $U+V$ и его базис.

г) Найти размерность подпространства $U \cap V$ и его базис.

2) **Аддитивная сложность метода Гаусса.**

Пусть $V = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \subset \mathbb{F}_2^n$. Найдем базис подпространства V методом Гаусса. Оцените число сложений, которые надо выполнить.

3) **Соотношения между векторами.** Пусть $V = \langle u_1, \ldots, u_m \rangle \subset \mathbb{F}_2^n$. Как описать все линейные соотношения между образующими $(u_1, \ldots, u_m)$ используя линейные уравнения? Найти число всех линейных соотношений, используя $k = \dim V$.

4) **Полные флаги.** Найти число полных флагов

$$\{\bar{0}\} \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_{n-1} \subset \mathbb{F}_2^n$$

n-мерного пространства над $\mathbb{F}_2$, где все включения строгие.

5*. **Дестабилизация базиса.** Пусть $(u_1, \ldots, u_n)$ – базис пространства $\mathbb{F}_2^n$. Изменим первую координату (в каноническом базисе) вектора u_1 на единицу. Иными словами, если $u_1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n})$, то заменим a_{11} на $(a_{11}+1)$. Найти число базисов $\mathbb{F}_2^n$, которые останутся базисами после этого преобразования.

ТЕМА 6. ЗАДАНИЕ ГИПЕРПЛОСКОСТИ УРАВНЕНИЕМ.

Гиперплоскость в $\mathbb{F}_2^n$ – любое подпространство размерности $(n-1)$. Задать ее можно базисом, но это требует $(n-1)$ векторов длины n. Иными словами мы задаем гиперплоскость в $\mathbb{F}_2^n$ матрицей, содержащей $n(n-1)$ бинарных символов.

ПРОБЛЕМА. Можно ли задать любую гиперплоскость в $\mathbb{F}_2^n$ более экономно?

`Методика.` Выше, в ТЕМЕ 3, мы доказали, что число гиперплоскостей равно числу ненулевых векторов в $\mathbb{F}_2^n$. Следовательно, каждую гиперплоскость можно закодировать одним вектором длины n, т.е. используя только n-бинарных символов. Именно в этом контексте линейные уравнения появляются в нашем курсе. Они позволяют задавать подпространства маленькой коразмерности более экономно, по сравнению с первым методом представления. Это важнейший пример двойственности в линейной алгебре, который мы и разбираем в данном разделе.

1) **Линейное спаривание векторов.** Пусть $u = (a_1, \ldots, a_n)$ и $v = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{F}_2^n$. Положим

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \in \mathbb{F}_2$$

Отображение
$$(\cdot,\cdot):\mathbb{F}_2^n\times\mathbb{F}_2^v\to\mathbb{F}_2$$
симметрично $(u,v)=(v,u)$ и линейно $(u,v+w)=(u,v)+(u,w)$. Следовательно, для любого фиксированного $v\in\mathbb{F}_2^n$ отображение $f_v:\mathbb{F}_2^n\to\mathbb{F}_2$, $f_v(u)=u+v$ линейное:
$$f_v(u_1+u_2)=f_v(u_1)+f_v(u_2).$$
Можно ли восстановить v по этому линейному отображению? Да. Если $f_v(u)=f_w(u)$ для любого $u\in\mathbb{F}_2^n$, то $v=w$. Более того, верна следующая теорема

Теорема. 1) Для любого $v\neq\bar{0}$ множество нулей функционала f_v
$$H_u=\{u\in\mathbb{F}_2^n\,:\,(v,u)=0\}$$
задает гиперплоскость в $\mathbb{F}_2^n$.

2) Любая гиперплоскость задается одним линейным уравнением.

Свойство конечности дает очень простое доказательство теоремы.

а) Линейность подпространства нулей следует из линейности функционала.

б) Далее находим число решений и получаем, что H_u – гиперплоскость.

в) Два различных вектора задают разные гиперплоскости.

Пусть $v_1=(a_1,\ldots,a_n)\neq v_2=(b_1,\ldots,b_n)$. Докажем, что пересечение H_{v_1} и H_{v_2} содержит ровно 2^{n-2} векторов. Отсюда следует, что $H_{v_1}\neq H_{v_2}$.

Берем одну пару букв (координат) таких, что $a_i\neq b_i$. Можно считать $a_i=1$, $b_i=0$. Тогда найдется $b_j=1$. Остальные $(n-2)$ переменные вектора $u=(x_1,\ldots,x_n)$ произвольные, а $x_i=*$, $x_j=*$ находятся однозначно из уравнений $(u,v_2)=0$ $(b_j=1)$ и $(u,v_1)=0$ $(a_i=1)$. Следовательно $|H_{v_1}\cap H_{v_2}|=2^{(n-2)}$.

г) Сравниваем число ненулевых векторов и число гиперплоскостей. Теорема доказана.

Вопрос: Используя идею доказательства (пункт б)), указать какой-нибудь базис гиперплоскости H_v.

Теория. У нас есть два различных метода задания гиперплоскости: базисом ($n(n-1)$ бит информации) и уравнением (n бит).

ПРОБЛЕМА + `Методика.` Системы линейных уравнений появляются в курсе в рамках решения следующей задачи: **Как задать произвольное подпространство системой линейных уравнений?** Положительный ответ будет дан в следующей ТЕМЕ 6.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 6

На семинаре можно предложить несколько конкретных задач в пространстве $\mathbb{F}_2^4$ или $\mathbb{F}_2^5$ различных типов.

1) Рассмотрим гиперплоскость $H_v < \mathbb{F}_2^5$. Найти несколько различных базисов этой гиперплоскости.

2) Найти базис пересечения $H_v \cap H_u < \mathbb{F}_2^5$.

3) Дан базис гиперплоскости. Найти ее уравнение.

4) Дано трехмерное подпространство $V < F_2^5$ (указать базис). Наити все гиперплоскости, которые его содержат. Является ли V их пересечением?

5) **Аффинные гиперплоскости.**

Аффинная гиперплоскость – это множество вида $w + H$, где $w \in \mathbb{F}_2^n$, а H – гиперплоскость.

а) Доказать, для любой гиперплоскости H и любого $w \notin H$ пространство $\mathbb{F}_2^n$ распадается в объединение двух непересекающихся множеств H и $w + H$.

б) Пусть $H = H_v$ задано уравнением с вектором коэффициентов v. Найти уравнение дополнительного множества $w + H$ из пункта 1).

в) Найто число аффинных гиперплоскостей в бинарном векторном пространстве размерности n.

ТЕМА 7. Задание подпространств системами линейных уравнений. Полный метод Гаусса нахождения базиса.

ПРОБЛЕМА. *Мы доказали, что любую гиперплоскость можно экономно задать одним уравнением. Можно ли задать подобным образом любое подпространство?*

`Методика.` В традиционном курсе линейной алгебры мы обычно не используем всю теоретическую мощь алгоритма Гаусса, а используем его только для решения систем линейных уравнений, которые возникают как формально схолатическое усложнение упражнений из программы средней школы.

Мы уже неоднократно говорили, что аннигиляция всех вычислений в случае поля $\mathbb{F}_2$ позволяет конкретно увидеть основной скелет, все движущие силы линейной алгебры. Из служебного метода решения систем линейных уравнений (сама эта задача появляется в университетском курсе без мотивации) алгоритм Гаусса превращается в мощнейший теоретический инструмент. Все главные теоремы первого курса доказываются, с использованиям алгоритмом Гаусса.

В случае важнейшей проблемы, поставленной в данной ТЕМЕ, нам следует не останавливаться на верхнетреугольной форме матрицы образующих, дающей базис подпространства, а продолжить приведение матрицы порождающих векторов к виду, когда над над осевыми элементами стоят нули. Эта матрица и даст нам систему уравнений, задающую подпространство. В итоге метод Гаусса немедленно приводит на к следующей важнейшей теореме.

Теорема. Любое подпространство задается системой линейных уравнений, иными словами, любое подпространство есть пересечение нескольких гиперплоскостей.

Уравнения гиперплоскостей. Для примера можно разобрать доказательство в случае гиперплоскости, заданной базисом. следующих примерах.

Ниже приведена гиперплоскость в $\mathbb{F}_2^5$, заданная **векторами-строчками** матрицы $A \in M_{4\times 5}(\mathbb{F}_2)$. соответствующих матриц. Найти уравнения, задающие эти гиперплоскости.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

После этого примера можно дать общее доказательство.

ПРОБЛЕМА Доказанная выше Теорема дает принципиальный ответ о возможности задания подпространств линейными уравнениями. Новый вопрос – какие свойства имеет это представление?

Иными словами, как найти пересечение гиперплоскостей, что сводится к решению однородной системы уравнений методом Гаусса.

ПРОБЛЕМА. Даны m гиперплоскостей H_{v_1}, ..., H_{v_m} в $\mathbb{F}_2^n$. Найти размерность и базис пересечения U этих гиперплоскостей

$$U = H_{v_1} \cap \cdots \cap H_{v_m} < \mathbb{F}_2^n.$$

Терема. Если $k = \dim V(v_1, \ldots, v_m)$, то размерность пространства пересечения U равно $n - k$.

Эта теорема приводит нас к важнейшей конструкции линейной алгебры – `конструкции двойственности` (см. ТЕМУ 9).

СЕМИНАР по ТЕМЕ 7.

1) Можно дать конкретные примеры подпространств и найти определяющие их системы уравнений.

2) Ниже приведены две гиперплоскости в $\mathbb{F}_2^5$, заданные векторами-строчками соответствующих матриц

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

а) Найти уравнения, задающие эти гиперплоскости.

б) Найти пересечения гиперплоскостей $H(A) \cap H(B)$? $H() \cap H(C)$ и $H(B) \cap H(C)$?

в) Найти пересечения гиперплоскостей $H(A) \cap H(B) \cap H(C)$?

3) Число гиперплоскостей с дополнительными условиями.

а) Найти все гиперплоскости в $\mathbb{F}_2^n$, которые не содержат ни одного из векторов e_1, e_2, …, e_n канонического базиса.

б) Найти число гиперплоскостей в $\mathbb{F}_2^n$, которые не содержат вектор e_1 из канонического базиса.

в) Найти число гиперплоскостей в $\mathbb{F}_2^5$, которые не содержат векторов e_1, e_3 и $e_4 + e_5$.

ТЕМА 8. Решение однородной системы уравнений и основная теорема линейной алгебры.

Решение проблемы о размерности пересечения гиперплоскостей $H_{v_1} \cap \cdots \cap H_{v_m}$ привело нас, во-первых, к необходимости использовать матрицы, как двумерную организацию образующих подпространства, а, во-вторых, к доказательству основной теоремы линейной алгебры.

Рангом матрицы по строчкам называется размерность подпространства, порожденного строчками.

Основная теорема линейной алгебры. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_2)$ матрица однородной системы линейных уравнений и ранг равен m. Тогда пространство решений системы

$$AX = \bar{0}.$$

является подпространством $\mathbb{F}_2^n$ размерности $n - m$.

Эта теорема будет играть ключевую роль в следующем курсе, посвященном линейным отображениям.

Кроме того алгоритм Гаусса дает нам первый важнейший результат о матрицах.

Теорема о ранге матрицы. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_2)$. Ранг матрицы по строчкам совпадает с рангом матрицы по столбцам. Иными словами, размерность подпространства в $\mathbb{F}_2^n$, порожденного строчками матрицы A, совпадает с размерностью подпространства в $\mathbb{F}_2^m$, порожденного столбцами матрицы A.

Решение проблемы, поставленной в Теме 3. *Найти базис пересечения пространств U, $V < \mathbb{F}_2^n$, заданных своими образующими.*

Алгоритм (метод) Гаусса дает нам пространство решений системы однородных линейных уравнений. Этот вопрос уже был проиллюстрирован в задаче 1) предыдущего семинара.

`Алгоритм решения:`

1) Найти базис подпространств U и $V < \mathbb{F}_2^n$, используя алгоритм Гаусса. При этом полностью привести матрицу базис, т.е. над осевыми элементами должны стоять только нули.

2) По приведенной матрице базиса найти систему уравнений, определяющие подпространства U и V.

2) Объединить системы в одну. Решить ее алгоритмом Гаусса и выписать базис пространства решений.

Другая интерпретация этой задачи. Если

$$U = H_{u_1} \cap \cdots \cap H_{u_k}, \qquad V = H_{v_1} \cap \cdots \cap H_{v_m},$$

тогда

$$U \cap V = H_{u_1} \cap \cdots \cap H_{u_k} \cap H_{v_1} \cap \cdots \cap H_{v_m}.$$

`Методика.` Интерпретация с гиперплоскостями показывает, что элементарные преобразования алгоритма Гаусса с уравнениями системы полностью совпадают с элементарные преобразования алгоритма Гаусса для нахождения базиса подпространства.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 8.

1) **Решения систем уравнений.**

а) Найти все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0. \end{cases}$$

б) Для любого $(b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in \mathbb{F}_2^5$ наити все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = b_1 \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 & = b_2 \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 & = b_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_5 & = b_4 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = b_5. \end{cases}$$

Для каких векторов $\bar{b} \in \mathbb{F}_2^5$ эта система уравнений имеет решение?

2) "Двойственной" задачей к задаче нахождения базиса пересечения двух подпространств $U \cap V < \mathbb{F}_2$ является задача об описании суммы $U + V$ через систему линейных уравнений. (Надо объединить базисы и найти системы уравнений для этого подпространства.)

3) Оценка сложности метода Гаусса. Пусть $(u_1, \ldots, u_k)$ – базис подпространства $V_k \subset \mathbb{F}_2^n$. Используя метод Гаусса, найдем систему из $n - k$ линейных однородных уравнений, определяющую подпространство V_k. Оценить число операций сложения, выполняемых в методе Гаусса.

4) Попробуйте описать уравнениями все подпространства $U_2 < \mathbb{F}_2^4$ размерности 2 такие, что

$$\forall\, u, v \in U \ : \ (u, v) = 0.$$

Что за система получается?

3) **Число матриц ранга k.**

а) Найти число матриц $M \in M_{3\times 6}(\mathbb{F}_2)$ порядка 3×6, имеющих ранг 3 (соответственно, ранг 2).

б) Найти число матриц $M \in M_{5\times 6}(\mathbb{F}_2)$ порядка 5×6 ранга 2 (соответственно, ранга 3 и 4).

в*) Найти число матриц $M \in M_{m\times n}(\mathbb{F}_2)$ ранга k.

ТЕМА 9. Линейная двойственность.

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ из Темы 3. В Разделе 3 мы получили следующее соотношение на число подпространств $N_k^{(n)}$ размерности k в n-мерном пространтве

$$N_k^{(n)} = N_{n-k}^{(n)},$$

Теперь мы готовы дать объяснение этого арифметического свойства в терминах линейной алгебры.

`Методика.` Система уравнений, задающая подпростанство U не единственная. Иначе говоря, подпространство U можно задать пересечением различных гиперплоскостей. Как избежать эту неодназначность? Рассмотрим коэффициенты уравнений или вектора $v_i \in F_2^n$ из теоремы. Именно подпространство V, порожденное этими векторами является ответом на наш вопрос о неоднозначности. Оно имеет определение, не зависящее от выбора векторов v_1, ..., v_m.

Теорема об ортогональном дополнении. Пусть дано $U < \mathbb{F}_2^n$.

1) Множество

$$U^{\perp} = \{v \in \mathbb{F}_2^n \,|\, \forall\, u \in U \ (v, u) = 0\}$$

является подпространством. Оно называется ортогональное дополнение U в $\mathbb{F}_2^n$.

2) $\dim U^{\perp} = n - \dim U$.

3) $(U^{\perp})^{\perp} = U$, поэтому соответствие $U \to U^{\perp}$ между подпространствами размерностей k и $n - k$ биективно.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 9.

1) Проиллюстрировать двойственность между линейными пространствами на примере подпространств пространства $\mathbb{F}_2^4$.
2) Попробуйте описать двойственность для подпространств размерности 3 в $\mathbb{F}_2^6$. Может ли подпространство быть двойственно самому себе про этом соответствии.

3) Самодвойственные пространства.

а) Если $v \in \mathbb{F}_2^n$ такое, что $(v, v) = 0$, то вес этого вектора (число ненулевых координат) четный (см. Семинар по Теме 1).

б) Найти примеры подпространств в $\mathbb{F}_2^4$ таких, что $U^{\perp} = U$.

в) Пусть $U < \mathbb{F}_2^n$ подпространство такое, что $U^{\perp} = U$. Какую размерность должно иметь такое пространство?

б) Найти все подпространства в $\mathbb{F}_2^4$ ($\mathbb{F}_2^6$) такие, что $U^{\perp} = U$.

ТЕМА 10. Задание подпространств уравнениями и двойственный базис.

`Методика.` Данная тема является переходной ко второй части курса по линейной алгебре, а именно, к линейным отображениям и алгебре матриц. Двойственный базис – важнейшая тема линейной алгебре в пространствах со скалярным произведение, раскрывающая и явление двойственности, и понятие обратной матрицы.

Идея и техника двойственности плохо усваивается даже студентами-математиками. В курсах для других специальностей она, обычно, исчезает. В контексте нашего изложения тема абсолютно естественная. Она завершает раздел по линейным подпространствами и будет мостом ко второй теме – "Линейные отображения и матрицы". Фактически, это наша первая встреча с проблемой обращения матриц и линейных отображений.

ПРОБЛЕМА. Как написать общую формулу для базиса двойственного подпространства $U^{\perp}$ по базису подпространству $U < \mathbb{F}_2^n$?

Для решения мы используем понятие двойственного базиса.

Теорема о двойственном базисе. Пусть дан произвольный базис $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ пространства $\mathbb{F}_2^n$. Тогда существует такой базис $(v_1^*, v_2^*, \ldots, v_n^*)$ пространства $\mathbb{F}_2^n$, что

$$(v_i, v_j^*) = \delta_{ij} \qquad \forall\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Доказательство существования дается методом Гаусса! Исследуйте единственность.

Эти две проблемы тесно связаны между собой. Они как бы двойственны. Для из решения вводится понятие **двойстевнного базиса**.

ПРОБЛЕМА. 1) Как написать общую формулу для решения произвольной системы линейных уравнений?

Решение первой проблемы. Как написать общую формулу для решения произвольной однородной системы линейных уравнений?

1) Пусть u_1, ..., $u_m \in \mathbb{F}_2^n$ – базис подпространства $U < \mathbb{F}_2^n$ размерности m

$$U = \mathrm{Vect}\,(u_1, ..., u_m).$$

Дополним базис u_1, ...,u_m до базиса $(u_1, ..., u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n)$ пространтва $\mathbb{F}_2^n$. Это легко сделать, используя алгоритм Гаусса!

2) Построим двойственный базис $(u_1^*, \ldots, u_m^*, u_{m+1}^*, \ldots, u_n^*)$.

3) Получаем базис двойственного подпространства

$$U^{\perp} = \mathrm{Vect}\,(u_{m+1}^*, ..., u_m^*).$$

Замечание. Базис $(u_1^*, \ldots, u_m^*)$ является двойственным базисом базиса $(u_1, ..., u_m)$ подпространства U. Следовательно мы доказали аналог основной теоремы Темы 10 для любого подпространства U в $\mathbb{F}_2^n$.

Отметим, что техника двойственного базиса позволит нам написать общее решение произвольной (неоднородной)системы из k линейных уравнений с n неизвестными

$$AX = \bar{b}, \qquad A \in M_{k\times n}(\mathbb{F}_2).$$

Более того теорема о двойственном базисе дает нам обратную матрицу квадратной матрицы порядка n. Этими вопросами, а именно, линейными отображениями и алгеброй матриц, мы будем заниматься в следующем курсе.

СЕМИНАР по ТЕМЕ 10.

1) Основной вопрос этого семинара – алгоритм Гаусса для построения двойственного базиса пространства $\mathbb{F}_2^n$ Его можно реализовать на конкретных примерах. Общая формула легко получается в случае раз 2. Дайте несколько конкретных примеров в случае размерностей 3 и 4.
2) Матрицы M_1, M_4 и M_{2n} даны ниже.

а) Доказать, что матрицы M_1, M_4 и M_{2n} имеют максимальный ранг.

б) Найти двойственный базис к базису, образованному строками матрицы M_1 и M_4 .

в) Решить аналогичный вопрос для матрицы M_{2n}.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ .. & .. & .. & \dots & .. & .. \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{F}_2).$$

3) **Аддитивная сложность алгоритма построения двойственного базиса.** Пусть $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ базис $\mathbb{F}_2^n$. Оценить число сложений, которые надо выполнить в алгоритме Гаусса для нахождения двойственного базиса.